29/10/19

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Πχ

Ένα ζάρι ρίχνεται μια φορά ($S=\{1,2,\dots,6\}$). Έστω ενδεχόμενο A το οποίο πραγματοποιείται όταν το αποτέλεσμα είναι άρτιος ($: A=\{2,4,6\}$). Τότε η πιθανότητα του A είναι ίση με

$$P(A)=\frac{\|A\|}{\|S\|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Δεχόμαστε μια μερική πληροφορία: Το αποτέλεσμα είναι ≥ 4. Έστω B το ενδεχόμενο το αποτέλεσμα να είναι ≥ 4 ($B=\{4,5,6\}$)

Ερώτημα: Αλλάζει η πιθανότητα του A μετά την μερική πληροφορία B ή παραμένει η ίδια;

(Ο νέος δχ είναι ο $\{4,5,6\}$ αφού το αποτέλεσμα είναι ≥ 4)

Ισχύει ότι:

$$\text{Ο } S \xrightarrow{\text{συστέλεται}} B$$

$$\text{ευνοϊκά αποτελέσματα } A \xrightarrow[\text{είναι}]{} \underbrace{\{4,6\}}_{A\cap B}$$

Συνεπώς η πιθανότητα του A αλλάζει και γίνεται:

$$\text{Νέα Π.Θ.}=\frac{2}{3}=\frac{\|A\cap B\|}{\|B\|}=\frac{\|A\cap B\|/\|S\|}{\|B\|/\|S\|}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Τη νέα πιθανότητα τη συμβολίζουμε με $P(A\overset{=\text{δοθέντος}}{|}B)$ και την ονομάζουμε δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B.

Ορισμός: Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π και $A, B \in \mathcal{A}$ με $P(B) > 0$. Η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος ότι έχει πραγματοποιηθεί το B συμβολίζεται με $P(A|B)$ και ορίζεται $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
αδέσμευτες

Ερώτημα: Είναι η δεσμευμένη πιθανότητα μέτρο πιθανότητας; Ικανοποιεί τα αξιώματα Kolmogorov;

Πρόταση: Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π και P μέτρο πιθανότητας σ' αυτόν. Έστω για $A, B \in \mathcal{A}$ με $P(B) > 0$ η συνολοσυνάρτηση $P(\cdot|B): \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $\forall A \in \mathcal{A}$.
Η $P(\cdot|B)$ είναι μ.π, καθώς:
A_1) $P(A|B) \geq 0$ προφανώς
A_2) $P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
A_3) Έστω $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) \overset{o\rho}{=} \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B\right)}{P(B)} = \frac{\Sigma P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

Παρατήρηση: Αφού η δεσμευμένη πιθανότητα είναι μ.π, ικανοποιεί τις ιδιότητες της αδέσμευτης πιθανότητας
π.χ $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$, $P(A \cup B|\Gamma) = P(A|\Gamma) + P(B|\Gamma) - P(A \cap B|\Gamma)$

Άσκηση:
Ένα ζάρι ρίχνεται δύο φορές. Έστω A το ενδεχόμενο η απόλυτη

τιμή της διαφοράς των ρίψεων να είναι ίση με 4 και έστω Β το ενδεχόμενο το άθροισμα των αποτελεσμάτων των ρίψεων να είναι ίσο με 8. Να βρεθεί η $P(A|B)$.

<u>Λύση:</u>

$S=\{(x,y): x,y=1,2,\dots,6\}$ με $||S||=36$

$A=\{(x,y): x,y=1,2,\dots,6,\ |x-y|=4\}=4\}=\{(6,2),(2,6),(5,1),(1,5)\}$

$B=\{(x,y): x,y=1,2,\dots,6,\ x+y=8\}=\{(6,2),(2,6),(5,3),(3,5),(4,4)\}$

$A\cap B=\{(6,2),(2,6)\}$

Άρα,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{||A\cap B||/||S||}{||B||/||S||}=\frac{2/6}{5/6}=\frac{2}{5}$$

<u>Άσκηση:</u>

Από τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας επιλέγονται 5.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να εκλεγούν ακριβώς 2 άσσοι αν είναι γνωστό ότι έχουν εκλεγεί ακριβώς 2 ρήγες;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να εκλεγούν ακριβώς 2 άσσοι δοθέντος ότι έχει εκλεγεί τουλάχιστον ένας άσσος;

<u>Λύση:</u>

Έστω $A=\{$Ακριβώς 2 άσσοι$\}$

$B=\{$Ακριβώς 2 ρήγες$\}$

$\Gamma=\{$Τουλάχιστον 1 άσσος$\}$

α)

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{||A\cap B||}{||S||}}{\frac{||B||}{||S||}}=\frac{\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}}{\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}}=0,0153$$

β) $P(A|\Gamma) = \dfrac{P(A\cap\Gamma)}{P(\Gamma)} = \dfrac{P(A)}{1-P(\Gamma')} = \dfrac{\frac{\|A\|}{\|S\|}}{1-\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}} = \dfrac{\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}}{1-\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}} =$

$= 0,1170$

<u>Παρατήρηση:</u> Είναι $P(A) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,0399$

$P(A|B) = 0,0153 < 0,0399 = P(A)$

$P(A|\Gamma) = 0,01170 > 0,0399 = P(A)$

Εφαρμογές Δεσμευμένης Πιθανότητας

Πρόταση:

α) <u>Πολ/κος νόμος ή Αρχή πιθανοτήτων:</u>

Αν $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{A}$ με $P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1})>0$, τότε

$P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1\cap\dots\cap A_{n-1})$.

β) <u>Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (ΘΟΠ):</u>

Αν $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ μια διαμέριση του S $(B_i\subseteq S,\ B_i\cap B_j=\emptyset,\ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = S)$

και $A\in\mathcal{A}$, τότε $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$

Απόδειξη:

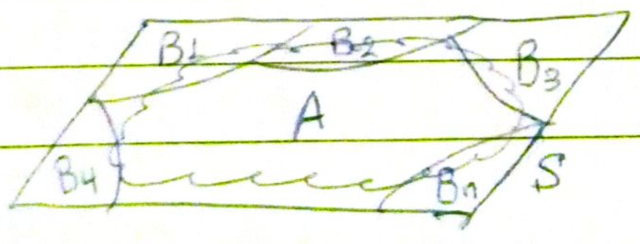
α)

$P(A_1)P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\dots P(A_n|A_1\cap\dots\cap A_{n-1}) =$

$= \cancel{P(A_1)}\dfrac{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}}\cdot\dfrac{\cancel{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}}{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}\cdot\ \dots\ \cdot\dfrac{P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1}\cap A_n)}{\cancel{P(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})}} =$

$= P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1}\cap A_n)$

β)



$$A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right) \xrightarrow[(A\cap B_i)\cup(A\cap B_j)\neq\emptyset]{\text{ιση}} \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Άσκηση:

Μια κάλπη περιέχει m-μαύρες μπάλες και n-άσπρες μπάλες. Μια σφαίρα εκλέγεται και εξετάζεται το χρώμα της. Η σφαίρα τοποθετείται και πάλι στην κάλπη μαζί με κ-σφαίρες ίδιου χρώματος. Μια δεύτερη σφαίρα εκλέγεται από την κάλπη. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

α) Η δεύτερη σφαίρα να είναι άσπρη

β) Οι δύο σφαίρες να είναι άσπρες

Λύση:

α) Έστω

$$\left.\begin{array}{l} A = \{\text{Η } 2^{η} \text{ σφαίρα να είναι άσπρη}\} \\ B_1 = \{\text{Η } 1^{η} \text{ σφαίρα να είναι άσπρη}\} \\ B_2 = \{\text{Η } 1^{η} \text{ σφαίρα να είναι μαύρη}\} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ΘΟΠ}}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) \Rightarrow$$

$$\frac{\binom{n+k}{1}}{\binom{n+m+k}{1}} = \frac{n+k}{n+m+k} \cdot \frac{n}{n+m} + \frac{n}{n+m+k} \cdot \frac{m}{m+n}$$

β) $P(A \cap B_1) = P(A|B_1)P(B_1) = \frac{n+k}{n+m+k} \cdot \frac{n}{m+n}$ (Πολ/κος Κανόνας)